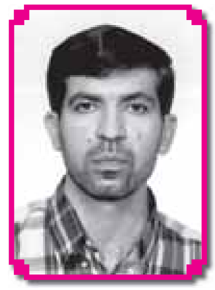
دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی



اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماهنامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماهنامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماهنامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماهنامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماهنامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول:
مسئله‌ها

۳۱۱. عدد گویای r را بیابید، به‌طوری که:

$$\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\pi r$$

۳۱۲. برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$\tan^{-1}\frac{1}{1+1+1^2}+\tan^{-1}\frac{1}{1+2+2^2}+\dots+\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2}<\frac{\pi}{4}$$

۳۱۳. مقادیر a، b و c را بیابید، به‌طوری که برای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ داشته باشیم:

$$f(0)=f(1)=f(2)=1396$$

۳۱۴. دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی روبه‌رو را حل کنید.

$$\begin{cases}x^2=y+\frac{1}{4}\\ y^2=x+\frac{1}{4}\end{cases}$$

۳۱۵. چند تابع f از $A=\{1,2,3,4\}$ به A می‌توان تعریف کرد به‌طوری‌که:

الف) $f(2)>f(3)$

ب) $f(1)\neq f(2)$

ج) برد تابع مجموعه‌ای دوعضوی باشد.

ابتدا مسئله را در سه حالت جداگانه حل کنید. سپس در حالتی مسئله را حل کنید که سه شرط را با هم در نظر می‌گیرید.

۳۱۶. این گزاره را ثابت یا رد کنید: «زیرمجموعهٔ S از اعداد صحیح نامنفی به‌گونه‌ای وجود دارد که هر عدد صحیح نامنفی را به‌صورت یکتایی به فرم x+2y می‌توان نوشت؛ به قسمی که: x,y∈S.

۳۱۷. نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به سه رأس مثلث وصل کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع طول دو پاره‌خط کوچک‌تر در میان PA، PB و PC با طول پاره‌خط بزرگ‌تر برابر است.

۳۱۸. در مستطیل ABCD با طول قطر d، عمود AE را بر قطر BD رسم کرده‌ایم. اگر طول اضلاع مستطیل EFCG برابر ۱ و n باشد، ثابت کنید: $\sqrt[3]{d^2}=\sqrt[3]{n^2}+1$. نقطهٔ F روی DC و نقطهٔ G روی BG است.

۳۱۹. حاصل جمع ده جملهٔ متوالی از یک دنباله هندسی برابر ۱۸ و حاصل جمع معکوس‌های آن‌ها برابر ۶ است. حاصل‌ضرب این ده جمله را به‌دست آورید.

۳۲۰. حاصل‌ضرب دو عدد سه رقمی $\overline{۲A۵}$ و $\overline{۱۳B}$ مضرب ۳۶ است، همهٔ مقادیر ممکن برای دو رقم A و B را بیابید.

بخش دوم:
راه‌حل‌ها

۲۸۱. یک ترازوی دو کفه‌ای داریم که میزان نیست (در حالی‌که هیچ وزنه یا شیء روی کفه‌ها نیست، دو کفه در یک ارتفاع نیستند). از طرف دیگر، وزنه یا سنگ ترازو به هر میزانی که بخواهیم در اختیار داریم. راهی برای وزن کردن یک شیء با وزن مجهول پیدا کنید.

در کفه‌ای که بالاتر است، آن‌قدر وزنهٔ معلوم می‌گذاریم تا دو کفه در مقابل هم قرار گیرند و ترازو میزان شود. اکنون ترازو میزان شده است و می‌توان هر شیء را وزن کرد.

۲۸۲. در کشوری که ۵۰ شهر دارد، می‌خواهیم بین شهرها خطوط هوایی برقرار کنیم؛ به‌طوری که بتوانیم از هر شهر به شهر دیگر با حداکثر ۱ توقف مسافرت کنیم. حداقل تعداد خطوط مستقیم بین شهرها را به‌دست آورید.

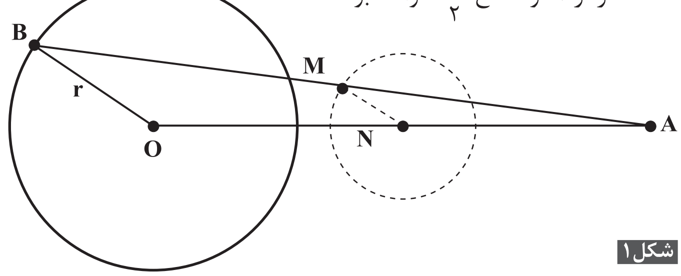
اگر متناظر با هر شهر یک رأس در گراف G در نظر بگیریم و هر دو شهر با پرواز مستقیم را با یک یال به‌هم وصل کنیم، با توجه به شرایط مسئله، G باید همبند باشد. از طرف دیگر، هر گراف همبند با n رأس، حداقل n-۱ یال دارد. پس تعداد یال‌های G حداقل برابر ۴۹ خواهد بود. برای رسیدن به شرایط خواسته شده، درخت G باید به شکل ستاره باشد؛ یعنی یک رأس به ۴۹ رأس دیگر وصل باشد.

۲۸۳. از ظرفی که ۱۰ لیتر آب دارد، می‌خواهیم ۶ لیتر آب برداریم. دو پیمانه با اندازه‌های ۵ لیتری و ۹ لیتری در اختیار داریم. چطور می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

با پیمانهٔ ۵ لیتری، ۵ لیتر آب برمی‌داریم و تمام آن را در پیمانهٔ ۹ لیتری می‌ریزیم. سپس یک‌بار دیگر بقیهٔ آب ظرف را در پیمانهٔ ۵ لیتری می‌ریزیم و ۴ لیتر آن‌را در پیمانه ۹ لیتری می‌ریزیم تا پر شود. در نتیجه در پیمانهٔ ۵ لیتری، ۱ لیتر باقی می‌ماند. ۹ لیتر آب پیمانهٔ بزرگ‌تر را به ظرف ۱۰ لیتری برمی‌گردانیم. سپس ۱ لیتر آب پیمانهٔ کوچک‌تر را داخل پیمانه ۹ لیتری می‌ریزیم. قدم آخر این است که با پیمانهٔ کوچک‌تر ۵ لیتر آب برداریم و به پیمانهٔ بزرگ‌تر اضافه کنیم.

۲۸۴. نقطهٔ A خارج دایرهٔ C مفروض است. نقطهٔ متحرک B را روی دایره، و M را نقطهٔ میانی AB در نظر بگیرید. با حرکت B روی C، مکان هندسی M را بیابید.

مطابق شکل اگر شعاع دایره، r و مرکز آن نقطهٔ O باشد و M و N به ترتیب وسط اضلاع AB و OA باشند، آن‌گاه MN طولی برابر $\frac{r}{۲}$ خواهد داشت. در نتیجه M روی دایره‌ای به مرکز N و شعاع $\frac{r}{۲}$ خواهد بود.



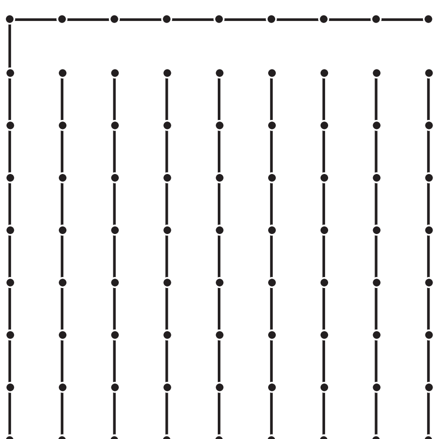
شکل ۱

۲۸۵. در یک کلاس تعداد دانشـــجویان دختر بیـــش از ۴۰ درصد و کمتـــر از ۵۰ درصد است. حداقل تعداد دانشجویان کلاس را بیابید.

اگـــر n تعـــداد کل دانشـــجویان و k تعداد دانشجویان دختر باشد، آن‌گاه باید: $\frac{۲}{۵} < \frac{k}{n} < \frac{۱}{۲}$. در نتیجه باید: $\frac{۲n}{۵} < k < \frac{n}{۲}$. با بررسی مقادیر اولیـــه برای n به عدد $n=۷$ می‌رســـیم و در این حالت: $k=۳$.

۲۸۶. با چوب کبریت یک جدول ۸×۸ ساخته‌ایم که شامل ۶۴ خانه یک‌دریک است. حداقل چند چوب کبریت را حذف کنیم، به‌طوری که بتوانیم از هـــر خانه جدول به هر خانهٔ دیگر جدول حرکت کنیم و مسیر حرکت هیچ چوب کبریتی را قطع نکند؟

اگر G را به این صورت تعریف می‌کنیم: به ازای هر خانهٔ جدول، رأسی در G در نظر می‌گیریم. هر دو رأس را که متناظر بـــا دو خانهٔ مجاور (با یک ضلع مشترک) هســـتند، با یک یال به هم وصل می‌کنیم. اگر ضلع مشـــترک آن‌ها را حذف کرده باشیم، چون می‌خواهیم از هر رأس به رئوس دیگر مسیری داشته باشیم، پس گراف G باید همبند باشـــد. در نتیجه G کم‌ترین تعداد یال را خواهد داشـــت؛ البته اگر یک درخت باشـــد. در نتیجه حداقل باید ۶۳ یال (چوب کبریت حذف شـــده) داشته باشد. شـــکل ۲ یک نمونه از جواب است.



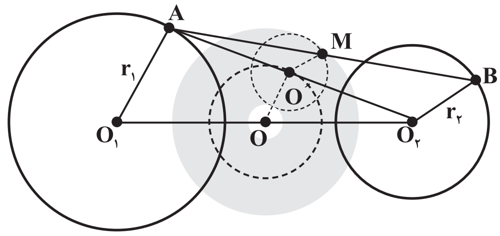
شکل ۲

۲۸۷. یک جعبهٔ در بـــاز با ابعاد صحیح داریم که قاعدهٔ آن مربع شـــکل و مساحت کل آن ۴۲۹ ســـانتی‌متر مربع است. ابعاد جعبه را بیابید، به‌طوری که جعبه بیشترین حجم را داشته باشد.

اگـــر x طـــول ضلـــع قاعـــده و y ارتفـــاع جعبـــه باشـــد، داریـــم: $x(x+۴y)=۴۲۹$، و یا: $x(x+۴y)=۳×۱۱×۱۳$. در نتیجـــه x برابر ۱، ۳، ۱۱، ۱۳ و یـــا مقداری بزرگ‌تر یا مســـاوی ۳۳ خواهد بود. اگـــر $x=۱$، آن‌گاه: $y=۱۰۷$ و حجم برابر ۱۰۷ خواهد بود. اگـــر $x=۳$، آن‌گاه $y=۳۵$ و حجم جعبه برابر ۳۱۵ خواهد شـــد. اگر $x=۱۱$ آن‌گاه $y=۷$ و حجم برابر ۸۴۷ خواهد شـــد. اگر $x=۱۳$، $y=۵$ و حجـــم جعبه برابر با ۸۴۵ خواهد شد. در حالتی که $x≥۳۳$ باشد، آن‌گاه: $x^۲>۴۲۹$ که غیرممکن اســـت. در نتیجه پاســـخ مســـئله $(x,y)=(۱۱,۷)$ است.

۲۸۸. دو دایره به شعاع ۲ و ۴ در صفحه مفروض‌اند و فاصلهٔ مراکز آن‌ها برابر است با ۱۰. نقطهٔ متحرک A روی دایرهٔ اول و نقطهٔ متحرک B روی دایرهٔ دوم به‌طور مستقل می‌توانند حرکت کنند. مکان هندســـی M وســـط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

شـــعاع دایرهٔ بزرگ‌تر را $r_۱$ و مرکز آن را $O_۱$، و شـــعاع دایرهٔ کوچک‌تـــر را $r_۲$ و مرکز آن‌را $O_۲$ می‌نامیم. همچنین وســـط پاره‌خط $O_۱O_۲$ را O می‌نامیم. اگر A را به $O_۲$ وصل کنیم و وسط آن‌را بـــا O' نمایش دهیـــم، آن‌گاه به راحتی می‌توان ثابـــت کرد: $OO' = \frac{r_۱}{۲}$ و $O'M = \frac{r_۲}{۲}$. حال اگر A را ثابـــت در نظر بگیریم و B را روی دایرهٔ دوم حرکت دهیم، M روی دایره‌ای به شـــعاع $\frac{r_۲}{۲}$ و مرکز O' تغییر خواهد کرد. با تغییر A نیز مرکز O' روی دایره‌ای به شـــعاع $\frac{r_۱}{۲}$ و مرکز O تغییر خواهد کرد. در نتیجه M در ناحیهٔ خاکســـتری رنگ با شـــعاع داخلی $\frac{r_۱ - r_۲}{۲}$ و شعاع خارجی $\frac{r_۱ + r_۲}{۲}$ تغییر می‌کند.



شکل ۳

۲۸۹. با فرض $a=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ریشه‌های معادلهٔ زیر را به‌دست آورید:

$$\sqrt[۳]{x+a}=\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{x-a}$$

اگر $m=\sqrt[۳]{x+a}$ و $n=\sqrt[۳]{x-a}$، آن‌گاه

داریم: $m-n=\sqrt[۳]{a}$.

پس: $(m-n)^۳=a$.

بنابراین: $m^۳-n^۳-۳mn(m-n)=a$.

در نتیجه:

$$x+a-(x-a)-۳\sqrt[۳]{x^۲-a^۲}(m-n)=a$$

که پس از ساده کردن ما را به معادلهٔ $\sqrt[۳]{x^۲-a^۲}=\frac{\sqrt[۳]{a^۲}}{۳}$ می‌رساند. با حل معادله به جواب $x=\sqrt{\frac{a^۲}{۲۷}+a^۲}=\frac{۲\sqrt{۲۱}}{۹}a$ می‌رسیم.

۲۹۰. با فرض $x_۱,x_۲,x_۳>۰$ و $\frac{۱}{۱+x_۱}+\frac{۱}{۱+x_۲}+\frac{۱}{۱+x_۳}=۱$ کمترین مقدار $P=x_۱x_۲x_۳$ را به‌دست آورید.

با تغییر متغیر $y_i=\frac{۱}{۱+x_i}$ خواهیم داشت:

$x_i=\frac{۱-y_i}{y_i}$. در نتیجه:

$$x_۱x_۲x_۳=(\frac{۱-y_۱}{y_۱})(\frac{۱-y_۲}{y_۲})(\frac{۱-y_۳}{y_۳})$$

$$=\frac{۱}{y_۱y_۲y_۳}(y_۲+y_۳)(y_۱+y_۳)(y_۱+y_۲)$$

حال به کمک نامساوی واسطه‌ها خواهیم داشت:

$$x_۱x_۲x_۳\geq\frac{۲\sqrt{y_۲y_۳}\times۲\sqrt{y_۱y_۳}\times۲\sqrt{y_۱y_۲}}{y_۱y_۲y_۳}=۸$$

در نتیجه کمترین مقدار $x_۱x_۲x_۳$ برابر ۸ است و زمانی به این مقدار می‌رسیم که:

$x_۱=x_۲=x_۳=۲$.